14/11/2017

$U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του U, $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συγκλίνει στο $\bar{\ell} \in \mathbb{R}^m$ για $\bar{x} \to \bar{x}_0$ (συμβολισμός: $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell}$)

$$: \iff \forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\} \text{ με } \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \quad \underbrace{\bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{\ell}}$$

$$\iff \|\bar{f}(\bar{x}_\nu) - \bar{\ell}\| \to 0$$

$$\iff \forall j = 1, \ldots, m \quad f_j(\bar{x}_\nu) = \ell_j$$

όπου $\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$, $\bar{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix}$

<u>Παρατήρηση</u> καλό είναι, όταν θέλουμε/χρειάζεται να είμαστε ακριβείς τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ να τα γράφουμε <u>καταρχήν</u> ως διανύσματα - στήλες.

$\forall j = 1, \ldots, m$

$\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$

$f_j(\bar{x}_\nu) \to \ell_j \iff \forall j = 1, \ldots, m$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$:

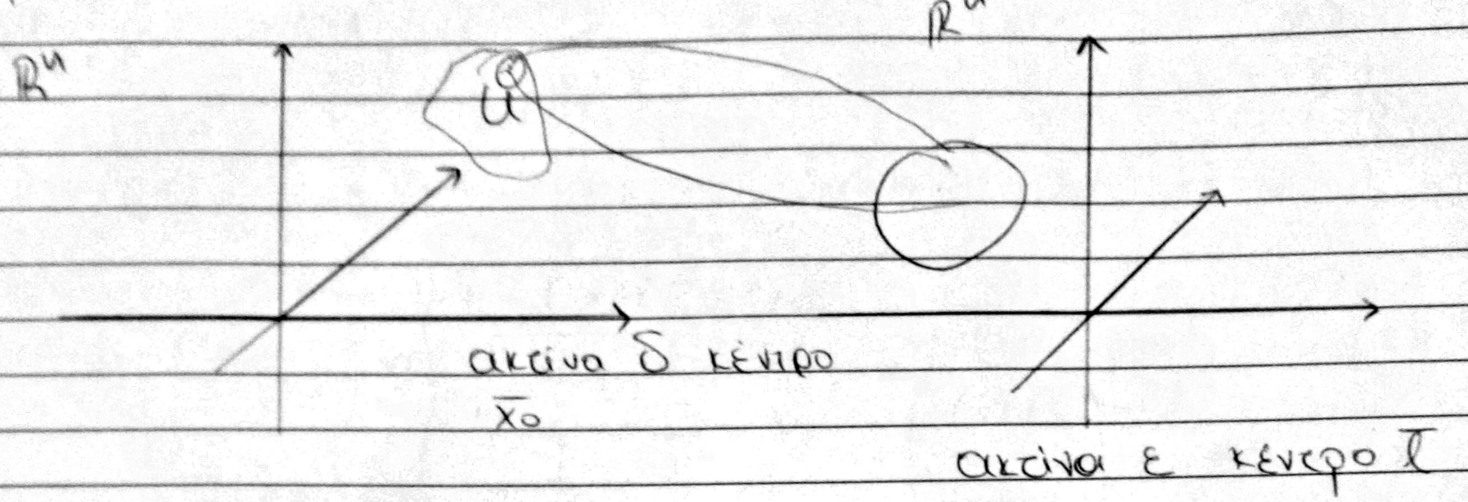
$$|f_j(\bar{x}) - \ell_j| < \varepsilon \implies \underbrace{\sum_{j=1}^{m} |f_j(\bar{x}) - \ell_j|^2}_{\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\|^2} < m\varepsilon^2$$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$:

$\underbrace{\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\| < \varepsilon}$ (για τις λεπτομέρειες: Άσκηση).

$\iff \bar{f}(\bar{x}) \in B(\bar{\ell}, \varepsilon)$

[Για κάθε ακτίνα ε μιας ανοικτής μπάλας κέντρου ℓ υπάρχει μια ανοικτή μπάλα ακτίνας δ κέντρου x_0, έτσι ώστε όλα ~~τα~~ τα $\bar{x}$ μέσα στη μπάλα με ακτίνα δ να έχουν τιμές στη μπάλα με ακτίνα ε.



<u>Ορισμός</u>: $\bar{f}\ \ U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής στο $\bar{x}_0$ $:\Longleftrightarrow$
$\forall\ (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \longrightarrow \bar{x}_0$ $\ \bar{f}(\bar{x}_\nu) \longrightarrow \bar{f}(\bar{x}_0)$

Επίσης, $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής $:\Longleftrightarrow$ $\bar{f}$ συνεχής ότι κάθε $\bar{x} \in U$

<u>Ιδιότητες ορίων</u>

Έστω $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{l}$, $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{m}$ $\Longrightarrow$

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\bar{f}+\bar{g})(\bar{x}) = \bar{l}+\bar{m}$, $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\alpha \bar{f})(\bar{x}) = \alpha\cdot\bar{l}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} (\bar{f}\cdot\bar{g})(\bar{x}) = \bar{l}\cdot\bar{m}$

[$\forall\ (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \longrightarrow \bar{x}_0$:

$\bar{f}(\bar{x}_\nu)\cdot\bar{g}(\bar{x}_\nu) \longrightarrow \bar{l}\cdot\bar{m}$

$\Longleftrightarrow |\bar{f}(\bar{x}_\nu)\cdot\bar{g}(\bar{x}_\nu) - \bar{l}\cdot\bar{m}| \longrightarrow 0$

$\Longleftrightarrow A_\nu = |(\bar{f}(\bar{x}_\nu)-\bar{l})\cdot\bar{g}(\bar{x}_\nu) + \bar{l}\cdot(\bar{g}(\bar{x}_\nu)-\bar{m})| \xrightarrow{\theta.\nu.\delta.o.} 0$

Θ.ν.δ.ο. $A_\nu \longrightarrow 0$ όπου

$0 \leq A_\nu \leq |(\bar{f}(\bar{x}_\nu)-\bar{l})\cdot\bar{g}(\bar{x}_\nu)| + |\bar{l}\cdot(\bar{g}(\bar{x}_\nu)-\bar{m})|$

$\underset{C-S}{\leq} \|\bar{f}(\bar{x}_\nu)-\bar{l}\|\cdot\underbrace{\|\bar{g}(\bar{x}_\nu)\|}_{\leq C} + \|\bar{l}\|\cdot\underbrace{\|\bar{g}(\bar{x}_\nu)-\bar{m}\|}_{\longrightarrow 0}$

(Κάθε ακολουθία που συγκλίνει είναι φραγμένη).

Ιδιότητες συνέχειας $\bar{f}, \bar{g}$ συνεχείς στο $\bar{x}_0$, τότε συνεχείς στο $\bar{x}_0$ οι $f+g$, af, $f \cdot g$

<u>Θεώρημα:</u> << Συνεχής εικόνα συμπαγούς είναι συμπαγής>>

Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής όπου $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές.

Τότε $\bar{f}(U) \subset \mathbb{R}^m$ είναι συμπαγές

<u>Απόδειξη</u> [Υπενθύμιση: $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές $\iff$

$\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \quad \exists (\bar{x}_{k_\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$ και $\bar{x}_0 \in U \quad \bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}_0$]

Έστω $(\bar{y}_\nu) \subset \bar{f}(U) \Rightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U \quad \bar{f}(\bar{x}_\nu) = \bar{y}_\nu \Rightarrow$
$\exists (\bar{x}_{k_\nu})$ με $\bar{x}_{k_\nu} \to \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{y}_{k_\nu} = \bar{f}(\bar{x}_{k_\nu}) \to \bar{f}(\bar{x}_0) \in \bar{f}(U)$.

<u>Θεώρημα</u> (SOS) (<< Συνεχής επί συμπαγούς λαμβάνουν μέγιστο και ελάχιστο >>)

Έστω $f: U \to \underline{\mathbb{R}}$ (δηλ. f πραγματική) συνεχής και $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε $\exists \max f = \max f(U)$ (δηλ. $\exists \bar{x}_{max} \in U$ με $f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_{max}) \quad \forall \bar{x} \in U$):
$\max\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in U\}$ και, αντίστοιχα, $\exists \min f = \min f(U) =$
$\min\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in U\}$ (δηλ. $\exists \bar{x}_{min} \in U$ με $f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}_{min}) \forall \bar{x} \in U$)

<u>Απόδειξη</u>

Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $f(U) \subset \mathbb{R}$ συμπαγές $\iff$ $\underline{f(U) \subset \mathbb{R}}$ κλειστό και <u>φραγμένο</u>
$\Rightarrow$ κάτω φραγμένο
$\Rightarrow \exists \inf f(U)$ (δηλ. το μέγιστο κάτω φράγμα)
δηλαδή $\forall \nu \in \mathbb{N} \quad \exists \bar{x}_\nu \in U \quad \underbrace{f(\bar{x}_\nu) \in [\inf f, \inf f + \tfrac{1}{\nu})}$

$\iff \inf f \leq f(\bar{x}_\nu) < \inf f + \frac{1}{\nu} \Rightarrow$

$f(\bar{x}_\nu) \to \inf f$

[Υπενθύμιση: $U \subset \mathbb{R}^n$ κλειστό $\iff \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$: $\bar{x}_0 \in U$]

Εδώ: $f(U) \subset \mathbb{R}$ κλειστό $\iff$: $\forall f(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $f(\bar{x}_\nu) \to a$: $a \in f(U)$

Άρα αφού $f(\bar{x}_\nu) \to \inf f \Rightarrow \inf f \in f(U) \Rightarrow$
$\min f = \inf f$.

<u>Άσκηση</u>. Δείξτε ότι η σφαίρα $\partial B(\bar{a}, r) \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγής.

<u>Λύση</u>

$$\partial B(\bar{a}, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}\| = r\}$$

$\partial B(0,r) \subset B(0, r+1) \Rightarrow \partial B(0,r)$ φραγμένο

Θ.ν.δ.ο. $\partial B(0,r)$ κλειστό: $(\bar{x}_\nu) \subset \partial B(0,r)$ με
$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (Θ.ν.δ.ο. $\bar{x}_0 \in \partial B(0,r)$ δηλ. $\|\bar{x}_0\| = r$)

Επειδή $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (;) έχουμε

$$\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \xRightarrow{\|\cdot\| \text{ συν.}} \underbrace{\|\bar{x}_\nu\|}_{=r} \to \underbrace{\|\bar{x}_0\|}_{=r}$$

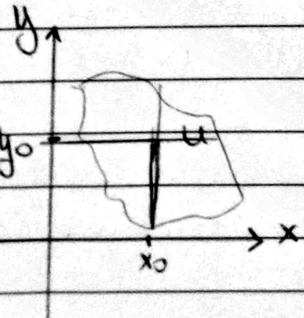
$\|\cdot\|$ συνεχής $\quad \bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \quad$ Θ.ν.δ.ο. $\|\bar{x}_\nu\| \to \|\bar{x}_0\|$

δηλ. $0 \le \underbrace{\big|\|\bar{x}_\nu\| - \|\bar{x}_0\|\big|}_{\le \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0} \to 0$

(Partial) Διαφόριση

Μερικές Παράγωγοι

σε comics: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό
$(x_0, y_0) \in U$



Θέτω $f_1(y) = f(x_0, y)$ για $(x_0, y) \in U$
$(x_0, y_0) \in U$

Τότε $$f_1'(y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_1(y_0 + h) - f_1(y_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Το $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ονομάζεται μερική παράγωγος της f

ως προς y στο $(x_0, y_0) \in U$.

Αντίστοιχα, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_2'(x_0)$, όπου $f_2(x) = f(x, y_0)$.

$\Rightarrow$ <u>ορισμός</u>: Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}_0 \in U$. Τότε η f ονομάζεται <u>μερικώς διαφορίσιμη</u> στο x_0 ως προς την i-οστή <u>μεταβλητή ($i = 1, \dots, n$)</u> <u>αν υπάρχει το όριο</u> $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(\bar{x}_0 + h\bar{e}_i) - f(\bar{x}_0)}{h} (\in \mathbb{R})$

$e_i = (0, \underset{\substack{\uparrow \\ i\ \text{θέση}}}{1}, \dots, 0)$

Αν $\bar{x}_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)})$ Τότε $\bar{x}_0 + h\bar{e}_i = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(i-1)}, x_0^{(i)} + h, x_0^{(i+1)}, \dots, x_0^{(n)})$.

Το $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$ ονομάζεται <u>μερική παράγωγος ως προς i-οστή μεταβλητή</u> στο $\bar{x}_0$.

$\Rightarrow$ <u>ορισμός</u> Η $f: U \to \mathbb{R}$ ονομάζεται <u>μερικώς διαφορίσιμη</u> στο $\bar{x}_0$ αν υπάρχουν $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0)\right) =$

$\underbrace{\text{grad} f(\bar{x}_0)}_{\text{κλίση της } f \text{ στο } \bar{x}_0} = \nabla f(\bar{x}_0)$

$\Rightarrow$ <u>Ορισμός</u>: Η $f: U \to \mathbb{R}$ ονομάζεται <u>μερικώς διαφορίσιμη</u> (στο U) αν $\exists\ \text{grand} f(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}^n\ \forall \bar{x}_0 \in U$

Και οι $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$ $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x})\right)$, $i = 1, \dots, n$,

ονομάζονται <u>μερικές παράγωγοι</u> της f.

$\Rightarrow$ Αν $\exists\ \dfrac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n, \dots$

και (οι συναρτήσεις αυτές!) είναι συνεχείς, τότε η $f: U \to \mathbb{R}$ (όχι οι πιο πάνω συναρτήσεις!) ονομάζονται <u>συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη</u>.

<u>Παράδειγμα 1</u> $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2x$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2+y^2} \cdot 2y$

Συνεπώς, η κλίση της f στο (x,y) $\nabla f(x,y) =$

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = e^{x^2+y^2}(2x,2y)$ η κλίση της f
στο (x,y). $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2+y^2}\cdot 2x$
και αντίστοιχα $\frac{\partial f}{\partial y}$

Εδώ οι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς

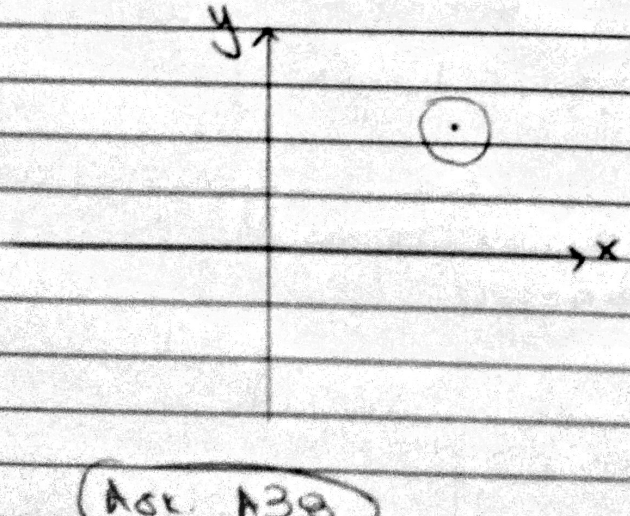
$\Longrightarrow \nabla f = \underbrace{\text{grad} f}_{=\text{gradient (κλίση)}} \; : U \to \mathbb{R}^2$

$$(\nabla f)(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ η f συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη

Παράδειγμα 2 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}, (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Εξετάστε ως προς την συνέχεια και μερική διαφορισιμότητα σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.



Για $(x,y) \neq (0,0)$: οκ.
Για $(x,y) = (0,0)$;

Ασκ. 138